Alternative Wohntheorie

Dipl.-Math. D. Wäsch

23. Juli 2007

Die Idee zum folgenden Text lieferte das Preisrätsel *Alternatives Wohnen* aus der *Spektrum der Wissenschaft*, Mai 2005. Zum Verständnis sollte der Leser Kenntnisse in den grundlegenden mathematischen Disziplinen (vor allem Multiplikation) mitbringen. Desweiteren sind Kenntnisse in Zahlentheorie, Kombinatorik und Graphentheorie hilfreich, aber nicht unbedingt notwendig.

Im Folgenden wird mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen gekennzeichnet. Die Menge der Primzahlen $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ ist die Menge aller der natürlichen Zahlen, die aus genau zwei verschiedenen Faktoren zusammengesetzt sind. Die Notation $a \mid b$ bedeutet, dass b ein Vielfaches von a ist.

Lösungsvorschläge zu den (vom Anspruch recht unterschiedlichen) Übungsaufgaben werden nicht gegeben. Das Erstellen bleibt dem Leser überlassen.

1 Einführung

Definition 1. *Seien $o, n, w \in \mathbb{N}$.*

1. *Ein **(Zahlen-)Haus** der **Ordnung** o mit n^2 **Wohnungen** ist eine $n \times n$-Matrix mit natürlichen, paarweise verschiedenen Eiträgen, bei der die Zeilen- und Spaltenprodukte jeweils o ergeben. Die Zeilen werden auch **Etagen** genannt.*

2. *Die Primfaktoren von o heißen **Mietkandidaten**. Die Menge aller Mietkandidaten wird mit $\mathbb{M}$ bezeichnet.*

3. *Eine **WG** (kurz für Wohngemeinschaft) ist eine natürliche Zahl w. Die Primfaktoren einer WG heißen **Mitbewohner**. Ist w ein Teiler von o, so ist die WG **mietberechtigt**.*

4. *Ein 1-Eintrag in einem Zahlenhaus heißt **leere Woh-***

nung. *Alle anderen sind* ***vermietet***.

Eine kleine Anmerkung zu den Mietkandidaten: Da eine Menge jedes Element nur einmal enthält, hat auch z. B. ein Haus der Ordnung 4 nur einen Mietkandidaten, nämlich die 2.

Weiterhin sollen triviale Zahlenhäuser mit $n = 1$ im folgenden Text ausgeschlossen sein.

Lemma 1. *Im Zahlenhaus ist jede Wohnung entweder leer oder von einer mietberechtigten WG gemietet.*

Beweis. Klar, da die Zeilenprodukte alle o ergeben müssen. □

Lemma 2. *Die Menge aller Mietkandidaten eines Zahlenhauses ist genau die Menge der Mitbewohner aller mietberechtigten WGs.*

Beweis. Sei $m \in \mathbb{M}$ ein Mietkandidaten. Dann ist m ein Teiler von o und damit selbt eine WG und ihr einziger Mitbewohner.

Sei umgekehrt w eine WG und m ein Mitbewohner. Dann gilt $m \mid w \mid o$ und $m \in \mathbb{P}$, also $\mathbb{P} \ni m \mid o$ und m daher ein Mietkandidat. □

Übung 1. *Zeigen Sie:*

1. *Für alle mietberechtigten WGs w gilt: $w \leq o$*
2. *Alle Mitbewohner von mietberechtigten WGs sind selbst mietberechtigte WGs.*
3. *Es gibt nur endlich viele Zahlenhäuser mit n^2 Wohnungen der Ordnung o.*
4. *Es gibt Zahlenhäuser mit nur einem Mietkandidaten aber beliebig großer Ordnung.*

2 Klonfreies Wohnen

Für die Aufgabe genügt es, eine spezielle Klasse von Zahlenhäuser zu betrachten:

Definition 2. *Zahlenhäuser, deren Ordnung das Produkt aller Mietkandidaten ist, heißen* ***klonfrei***.

Die Anzahl der Mietkandidaten in einem klonfreien Zahlenhaus wird mit M bezeichnet, also $M = \#\mathbb{M}$. Die Menge der Mietkandidaten lässt sich dann als

$$\mathbb{M} = \{m_1, \ldots, m_M\}$$

darstellen mit paarweise verschiedenen m_i und $\prod_{i=1}^{M} m_i = o$.

Einige der folgenden Aussagen lassen sich auf allgemeine Zahlenhäuser übertragen.

Lemma 3. *In jeder Etage und jeder Spalte eines klonfreien Hauses wohnt jeder Mietkandidat genau einmal.*

Beweis. Es gilt $\prod_{i=1}^{M} m_i = o$. Da die Primfaktorzerlegung bis auf Reihenfolge eindeutig ist, ist dies auch die einzige Möglichkeit, die Ordnung zu erhalten, weshalb jede Zeile und Spalte genau diese Komponenten haben muss. □

Satz 1. *Eine WG in einem klonfreien Zahlenhaus mit n^2 Wohnungen hat höchstens $M - n + 1$ Mitbewohner.*

Beweis. Angenommen eine Wohnung ist mit $a > M - n + 1$ Mitbewohnern belegt. O. B. d. A. ist dies die der erste Wohnung der ersten Etage. Dann bleiben nur noch $M - a < n - 1$ Mietkandidaten für die übrigen Wohnungen in der Etage bzw. Spalte. Damit muss es in der ersten Spalte eine leere Wohnung geben, genauso wie in der ersten Etage. Da die nicht zusammenfallen können, denn an der Position liegt ja schon die WG mit a Mitbewohnern, muss es also zwei verschiedene, leere Wohnungen geben, was nach Def. nicht möglich ist. □

Diese Schranke kann i. A. nicht verbessert werden, denn wähle z. B. $n = 3$ und $o = 210$. Dann ist wegen $\mathbb{M} = \{2, 3, 5, 7\}$ $M = 4$ und $M - n + 1 = 2$. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot 5 & 2 \cdot 7 \\ 7 \cdot 3 & 2 & 5 \\ 2 \cdot 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

stellt ein klonfreies Zahlenhaus dar mit WGs mit zwei Mitbewohnern.

Die folgenden Aussagen geben einen Überblick über die Größe von klonfreien Zahlenhäusern:

Lemma 4. *Jedes Zahlenhaus hat mindestens neun Wohnungen.*

Beweis. Anders ausgedrückt: $n = 2$ ist nicht möglich. Das liegt an der Bedingung, dass alle Einträge paarweise verschieden sind, denn legt man einen Eintrag w fest, muss in dem anderen Eintrag derselben Zeile und Spalte jeweils $\frac{o}{w}$ stehen. □

Das obige Beispiel zeigt auch, dass Zahlenhäuser mit $n = 3$ möglich sind.

Lemma 5. *Für jedes klonfreie Zahlenhaus mit n^2 Wohnungen und M Mietkandidaten gilt*

$$M \geq \begin{cases} 4 & n = 3 \\ 5 & n = 4 \\ n + 2 & n > 5 \end{cases}$$

Beweis. Man kann aus Satz 1 ablesen, dass jede Wohnung mit 0 bis $M-n+1$ Bewohnern belegt ist. Die Zahl $\binom{M}{i} = \frac{M!}{i!(M-i)!}$ gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, i aus einer Menge von M auszuwählen. Somit ist

$$A(n) := \sum_{i=0}^{M-n+1} \binom{M}{i}$$

die Anzahl der mietberechtigten WGs, die nicht zu groß sind (incl. der leeren Wohnung). Insgesamt kann es nicht mehr Wohnungen als solche WGs geben, d. h. es gilt $n^2 \leq A(n)$.

Da bei wachsendem n die Funktion A fällt, gibt es ein größtes n für das die Ungleichung gilt. Die ersten Summationselemente ergeben:

$$\binom{M}{0} = 1 \qquad \binom{M}{1} = M$$
$$\binom{M}{2} = \frac{M(M-1)}{2} \qquad \binom{M}{3} = \frac{M(M-1)(M-2)}{6}$$

Dies führt zu den Ungleichungen

$$
\begin{aligned}
M^2 &\le 1 + M \\
(M-1)^2 &\le 1 + M + \frac{1}{2}M(M-1) \\
(M-2)^2 &\le 1 + M + \frac{1}{2}M(M-1) + \frac{1}{6}M(M-1)(M-2)
\end{aligned}
$$

Die erste Ungleichung ist nur für $M = 1$ erfüllt. Das führt aber zu keinem Zahlenhaus, da die trivialen Häuser ausgeschlossen sind.

Die zweite Ungleichung ist für $M \le 5$ erfüllt und die dritte für $M \ge 1$, was zusammen mit $n \ge 3$ die Behauptung zeigt. □

Zumindest für $n = 3$ ist die angegebene Ungleichheit minimal, was das obige Beispiel zeigt. Für andere Mietkandidaten-Anzahlen müssen noch weitere Untersuchungen gemacht werden.

Definition 3. *Eine WG, die aus nur einem Mitbewohner besteht, heißt* ***Single****. Eine WG aus zwei Mitbewohnern nennt man* ***Pärchen****.*

Definition 4. *Jeder Mitbewohner einer WG im Zahlenhaus heißt* ***Mieter****. Ist ein Mitbewohner Mieter in mehreren WGs, so nennt man diesen Mietkandidaten* ***reich****. Die Kollektion aller Mieter bildet eine Multimenge (d. h. eine Menge in der Elemente mehrfach vorkommen dürfen) und wird* ***Hausgemeinschaft*** *genannt.*

Nach Übung 2 gibt es genau $n \times M$ Mitgesuche im Haus für die n^2 Wohnungen. Außerdem gilt: In höchstens $\binom{M}{i}$ Wohnungen wohnen i Mitbewohner. Damit kann die Abschätzung aus Lemma 5 verbessert werden:

Satz 2. *Für jedes klonfreie Zahlenhaus mit n^2 Wohnungen und M Mietkandidaten gilt*

$$M \ge 2n - 2$$

Beweis. Die Ungleichung gilt, da sonst zu wenig Mietkandidaten für die Füllung des Hauses zur Verfügung stehen. Um dies zu prüfen, wird im folgenden versucht, die zur Verfügung stehenden Kandidaten in möglichst kleine WGs unterzubrigen. Dabei wird gezählt, wie viele WGs in welchen Größen gebildet werden müssen. Ein Zahlhaus ist nur dann möglich, wenn dafür dann genügend Mietkandidaten zur Verfügung stehen.

Es kann maximal eine leere Wohnung geben, M Singles und $M(M-1)/2$ Pärchen. Für diese drei WG-Typen werden bereits $M + M(M-1) = M^2$ Mieter benötigt. Da aber nach Lemma 5 $M \ge n + 2$ gilt, ist $nM \le (M-2)M < M^2$, weswegen klar ist, dass es nicht genügend Mieter gibt um alle Möglichkeiten dieser drei WG-Größen zu füllen. Deswegen reicht es aus, diese drei Größen zu betrachten: Wenn ein Haus nicht damit gefüllt werden kann, kann es erst recht nicht mit größeren WGs gefüllt werden.

Angenommen $M = 2n - 3$. Die Anzahl der Wohnungen, die mit WGs bis zur Größe drei gefüllt werden können, beträgt

$$\begin{aligned}1 + M + M(M-1)/2 &= \frac{1}{2}M^2 + \frac{3}{2}M + 1\\ &= \frac{1}{2}(2n-3)^2 + \frac{3}{2}(2n-3) + 1\\ &= 2n^2 + 1 > n^2\end{aligned}$$

Es können also alle Wohnungen abgedeckt werden. Den geringsten Personenbedarf hat man, wenn man eine leere Wohnung, M Singles und $n^2 - M - 1$ Pärchen einziehen lässt. Dann benötogt man aber

$$\begin{aligned}M + 2(n^2 - M - 1) &= (2n-3) + 2(n^2 - (2n-3) - 1)\\ &= 2n^2 - 2n + 1\\ &= n(2n-3) + n + 1 > nM\end{aligned}$$

Mietkandidaten, die nicht zur Verfügung stehen. Also kann es kein Zahlenhaus mit n^2 Wohnungen und $M = 2n - 3$ verschiedenen Mietkandidaten geben.

Ist dagegen $M = 2n - 2$, so können erst recht alle Wohnungen abgedeckt werden. Da ein Single mehr zur Verfügung steht, wird ein Pärchen weniger benötigt; stattdessen stehen mehr Personen zur Verfügung. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}M + 2(n^2 - M - 1) &= (2n-2) + 2(n^2 - (2n-2) - 1)\\ &= n(2n-2) = nM\end{aligned}$$

Es werden also auf diese Weise genau alle Kandidaten im Haus untergebracht. □

Übung 2. *Zeigen Sie:*

1. *Es gibt keine klonfreien Zahlenhäuser mit nur einem Mietkandidaten (im Gegensatz zu den nicht-klonfreien Zahlenhäusern).*

2. *Alle Mieter sind reich. Genauer lässt sich sagen, dass jeder Mietkandidat in genau n WGs vorkommt.*

3. *Die Hausgemeinschaft besteht aus nM Mitgliedern.*

4. *Es gibt ein klonfreies Zahlenhaus der Größe $n \times n$ mit $2n - 2$ Mietern für jedes $2 < n \in \mathbb{N}$.*

3 Anzahl minimaler klonfreier Häuser

Die Anzahl der klonfreien Häuser mit n^2 Wohnungen hängt nur schwach von der Ordnung o ab, wie folgendes Lemma zeigt:

Lemma 6. *Seien H_1 und H_2 Mengen der klonfreien Häuser mit n^2 Wohnungen und Ordnungen o_1 und o_2. Die Menge der Mietkandidaten sei $\mathbb{M}_1$ bzw. $\mathbb{M}_2$ und es gelte $M_1 = \#M_1 = \#M_2 = M_2$.*

Dann gibt es eine Bijektion von H_1 auf H_2.

Beweis. Wegen $M_1 = M_2$ gibt es eine Bijektion $\circ$ von $\mathbb{M}_1$ auf $\mathbb{M}_2$. Sei h ein Zahlenhaus aus H_1 und zerlege alle WGs in Primfaktoren. Diese Primfaktoren lassen sich entsprechend $\circ$

ersetzen. Diese neu entstandene Matrix ist wieder ein Zahlenhaus; klarerweise eines das in H_2 enthalten ist.

Ein einfaches Vertauschen der Indizes zeigt die andere Richtung und der Beweis ist erbracht. □

Die Anzahl Zahlenhäuser hängt also höchstens von der Anzahl der Mietkandidaten ab. Da durch das Vertauschen von Zeilen, das Vertauschen von Spalten und Spiegeln an der Hauptdiagonalen die Eigenschaften eines Zahlenhauses erhalten bleiben, können so aus einem Zahlenhaus $2(n!)^2 - 1$ weitere konstruiert werden. Das sind aber nicht alle Möglichkeiten, denn alle Zahlen, die vorher nicht in einer Zeile oder Spalte waren, sind es nach dem Vertauschen immer noch nicht. Also ist $2(n!)^2$ nur eine untere Schranke für die Anzahl der Zahlenhäuser mit n^2 Zimmern. Desweiteren gelten aufgrund dieser Symmetrie alle Aussagen über Etagen auch für Spalten.

Allgemein ist die Anzahl der Zahlenhäuser schwierig zu bestimmen. Die folgende Klasse kann aber zumindest in Ansätzen überblickt werden:

Definition 5. *Ein Zahlenhaus mit n^2 Wohnungen und $M = 2n - 2$ Mietkandidaten heißt **minimal**.*

Dass solche Zahlenhäuser existieren, wurde bereits in Übung 2 gezeigt.

Lemma 7. *In einem minimalen Zahlenhaus gibt es keine WG mit mehr als zwei Mitbewohnern.*

Beweis. Wie aus dem Beweis zu Satz 2 ersichtlich, wird ein minimales Zahlenhaus mit einer leeren Wohnung, n Singles und $n^2 - n - 1$ Pärchen gefüllt, wofür alle zur Verfügung stehenden Personen gebraucht werden. Daher kann es keine WG mit mehr als zwei Mitbewohnern geben. □

Korollar 1. *In einem minimalen, klonfreien Zahlenhaus gilt:*

1. *In einer Etage (bzw. Spalte), in der es eine leere Wohnung gibt, wohnen keine Singles.*
2. *In einer Etage wohnen höchstens zwei Singles.*

Beweis. Folgt direkt aus dem vorangegenen Lemma 7 und der Anzahl $M = 2n - 2$. □

Um nun die Anzahl der minimalen, klonfreien Häser zu zählen, wird diese Überlegung ausgenutzt. Es gibt n^2 Möglichkeiten, die leere Wohnung zu plazieren. In derselben Zeile und Spalte kommen ausschließlich Pärchen vor, die darüberhinaus durch die anderen WGs eindeutig bestimmt sind. Streicht man diese Zeile und Spalte, bleibt eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix übrig, in der $2(n-1)$ Singles verteilt werden müssen. Die restliche Wohnungen werden mit Pärchen aufgefüllt.

Daher ist interessant, wie viele Möglichkeites es gibt, in einer $n \times n$-Matrix $2n$ Einsen zu verteilen, so dass in jeder Zeile und Spalte genau zwei Einsen stehen. Dafür wird etwas Graphentheorie zur Hilfe genommen.

Definition 6. *Ein **schlichter Graph** besteht aus einer Menge von Punkten $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, die **Ecken** genannt werden und einer Menge E von Linien, die zwei verschiedene Ecken verbinden und **Kanten** heißen. Jede Kante kann durch eine zweielementige Eckenmenge $\{v_i, v_j\}$ repräsentiert werden.*

Die Anzahl der Kanten, zu denen eine Ecke gehört, heißt ***Eckengrad****. Ist der Eckengrad jeder Ecke identisch d, so nennt man den Graphen* ***d-regulär****.*

Ein ***Weg*** *der Länge l von v_0 nach v_l ist eine Eckenfolge $v_{i_0}, \dots, v_{i_l}$, so dass $\{v_{i_j}, v_{i_{j+1}}\} \in E$ für alle $j \in \{0, \dots, l-1\}$ gilt und die Ecken $v_0, \dots, v_{l-1}$ paarweise verschieden sind. Ein Weg heißt* ***geschlossen****, wenn $v_{i_0} = v_{i_l}$ gilt.*

Eine Eckenmenge $K \subseteq V$ heißt ***Komponente****, falls es für alle Eckenpaare aus $v, w \in K$ einen Weg von v nach w gibt und für alle Eckenpaare $v \in K$, $w \notin K$ kein Weg von v nach w existiert. Eine Komponente K heißt* ***Kreis*** *der Länge l, falls sie l Ecken enthält und der Eckengrad für alle enthaltenen Ecken 2 ist.*

Im Folgenden werden ***bipartite*** *Graphen betrachtet, bei denen die Eckenmenge in zwei Hälften $V = V_1 \cup V_2$ mit $V_i = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,n}\}$ zerfällt und es keine Kante innerhalb der Eckenmengen V_1 bzw. V_2 gibt.*

Lemma 8. *Es gilt:*

1. *Ein 2-regulärer Graph besteht aus einer disjunkten Vereinigung von Kreisen.*

2. *Alle Kreise haben mindestens die Länge $l = 3$.*

3. *In einem bipartiten Graphen gibt es nur Kreise gerader Länge.*

Beweis. Sehr leicht einzusehen und aus der Graphentheorie bekannt. □

Lemma 9. *Es gibt genau so viele verschiedene 0-1-Matrizen der Größe $n \times n$ mit genau zwei Einsen in jeder Zeile und Spalte, wie es bipartite Graphen mit $2n$ Ecken und Eckengrad 2 gibt.*

Beweis. Die Zeilen repräsentieren die Ecken $v_{1,1}, \dots, v_{1,n}$, die Spalten die Ecken $v_{2,1}, \dots, v_{2,n}$. Dann bedeutet eine Eins an der Stelle i, j eine Kante zwischen $v_{1,i}$ und $v_{2,j}$. Die Anzahl der Einsen in der i-ten Zeile repräsentiert den Eckengrad von $v_{1,i}$ und analog ist die Anzahl der Einsen in der j-ten Spalte der Eckengrad von $v_{2,j}$. Da in jeder Zeile und Spalte genau zwei Einsen stehen, ist der Graph ein bipartiter 2-regulärer Graph.

Umgekehrt kann auf diese Weise für jeden bipartiten, 2-regulären Graphen eine 0-1-Matrix der Größe $n \times n$ aufgestellt werden, die in genau jeder Zeile und Spalte zwei Einsen trägt. Es gibt also eine Bijektion zwischen Spalten und Graphen, was die Behauptung zeigt. □

Lemma 10. *Seien V_1 und V_2 Eckenmengen mit jeweils n Elementen. Dann gibt es genau $(n-1)! \cdot n!/2$ verschiedene bipartite 2-reguläre Graphen mit Eckenmengen V_1 und V_2, die nur einen einzigen Kreis enthalten.*

Beweis. Die Frage ist, auf wieviele Arten kann man die Eckenmenge $V_1 \cup V_2$ durchlaufen kann und dabei immer abwechselnd eine Ecke aus den Teilmengen zu nehmen. Es kommt also nur auf die Reihenfolge an, in der V_1 und V_2 durchlaufen werden. Dann kann man diese Reihenfolgen im Reißverschlussverfahren zusammenfügen.

Für V_1 und V_2 gibt es jeweils $n!$ Reihenfolgen, also gibt es $2(n!)^2$ Permutationen, die immer abwechselnd eine Ecke aus V_1 und V_2 (oder umgekehrt) enthält. Dadurch wird aber jeder Graph $2 \cdot 2n$ mal gezählt, denn jeden Kreis kann man bei allen $2n$ Ecken beginnen und in zwei Richtungen durchlaufen. Daher ist die Anzahl der verschiedenen Kreise gerade

$$\frac{2(n!)^2}{4n} = \frac{(n-1)! \cdot n!}{2}$$

□

Lemma 11. *Die Anzahl der bipartiten 2-regulären Graphen mit $2n$ Ecken, bei denen die Eckenmenge in $V = V_1 \cup V_2$ mit $V_i = \{v_{i,1}, \ldots, v_{i,n}\}$ zerfällt, kann über*

$$b(n) := \sum_{l_1+\cdots+l_k=n} \frac{(n!)^2}{2^k \prod_{i=1}^n (v_i!)^2 \prod_{i=1}^k l_i}$$

bestimmt werden. Die Summe läuft dabei über alle additiven Zerlegungen von n mit $l_1, \ldots, l_k > 1$. Die Vielfachheiten der Komponentengrößen v_i sind abhängig von der jeweiligen Zerlegung als

$$v_i := a \iff i \text{ kommt genau } a \text{ mal in } l_1, \ \ldots, \ l_k \text{ vor}$$

definiert.

Beweis. Wie schon gesagt, besteht ein solcher Graph aus einer Vereinigung von Kreisen gerader Länge. Dies sind aber wieder genau die Komponenten des Graphen. Liegt eine Zerlegung in Komponenten $K_1, \ldots, K_k$ mit $2l_1, \ldots, 2l_k$ Elementen vor, so gibt es, da die Komponenten voneinander unabhängig sind,

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{l_i!(l_i-1)!}{2}$$

verschiedene Graphen.

Es gibt genau $n!$ Anordnungen einer Menge mit n verschiedenen Elementen. Soll die Menge in k Teilmengen der Größen $l_1, \ \ldots, \ l_k$ aufgeteilt werden, kann diese Anzahl wie folgt gezählt werden: Von der angeordneten Menge werden die ersten l_1 Elemente der ersten Teilmenge zugeordnet, die nächsten l_2 Elemente der zweiten usw. Dann wird aber jede Teilmenge $l_i!$-fach gezählt. Also ist die gesuchte Anzahl gerade

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k l_i!}$$

Wenn mehrere Teilmengen derselben Größe ausgewählt werden, ist es aber egal, welche davon zuerst gewählt wurde. Dieser Fehler muss noch korrigiert werden. Das ergibt dann insgesamt, da für beide Teilmengen des bipartiten Graphen dieselben Bedingungen gelten

$$\left(\frac{n!}{\prod_{i=1}^n v_i! \prod_{i=1}^k l_i!}\right)^2$$

Möglichkeiten, Komponenten mit je n Ecken aus beiden Eckenmengen zu wählen.

Zusammen ist die Anzahl der möglichen Graphen also:

$$b(n) = \sum_{l_1+\cdots+l_k=n} \left(\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} v_i! \prod_{i=1}^{k} l_i!} \right)^2 \prod_{i=1}^{k} \frac{l_i!(l_i-1)!}{2}$$
$$= \sum_{l_1+\cdots+l_k=n} \frac{(n!)^2}{2^k \prod_{i=1}^{n} (v_i!)^2 \prod_{i=1}^{k} l_i}$$

□

Die Menge $S(n)$ der Summen mit $l_1 + \cdots + l_k = n$ und $l_i > 1$ ist dabei leider nicht einfach zu bestimmen. Man kann aber festhalten, dass für die Mächtigkeit $\#S(n)$ gilt:

$$\#S(n) = \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n-2i,i}$$

mit

$$A_{k,l} = \begin{cases} 0 & k < 0 \text{ oder } l \leq 0 \\ 1 & k = 0 \text{ oder } l = 1 \\ A_{k,l-1} + A_{k-l,l} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $A_{k,l}$ die Anzahl der Möglichkeiten, k Einsen auf l Summanden zu verteilen. Da alle Summanden mindestens 2 sein müssen, gibt es bei i Summanden genau $k-2i$ Einsen um auf k zu kommen. Die rekursive Formel für $A_{l,k}$ erklärt sich so: Steht nur ein Summand zur Verfügukg oder sind alle Einsen bereits verteilt, so ergibt sich nur eine einzige Möglichkeit. Im anderen sinnvollen Fall kann man die Möglichkeiten aufteilen: einmal verteilt man die k Einsen nur auf $l-1$ Summanden (und hält den einen fest) oder man benutzt alle Summanden; dann muss aber auch auf jeden Summanden eine Eins verteilt werden und es stellt sich die Frage, wie viele Möglichkeiten es für die restlichen $k-l$ Einsen gibt, auf l Summanden verteilt zu werden.

Für die ersten natürlichen Zahlen ergibt sich danach:

$\boldsymbol{n =}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{\#S(n) =}$	0	1	1	2	2	4	4	7	8	12

Satz 3. *Die Menge $\mathbb{H}(n^2)$ der minimalen, klonfreien Häuser mit n^2 Wohnungen hat mindestens $n^2 \cdot b(n-1) \cdot (2n-2)!$ Elemente.*

Beweis. Die leere Wohnung wird an eine der n^2 möglichen Stellen gesetzt. Damit ist klar, dass die entsprechende Etage und Spalte mit Pärchen gefüllt wird. Für die Anordnung der $2n-2$ Singles stehen nach den vorigen Lemmata $b(n-1)$ verschiedene Verteilungen zur Verfügung. □

Werden durch das Positionieren der leeren Wohnung und der Singles die Position der Pärchen festgelegt, so ist die in Satz 3 angegebene untere Schranke die tatsächliche Anzahl der Zahläuser. Dies ist in den Fällen $n \in \{3, 4\}$ der Fall.

Lemma 12. *Minimale Zahlhäuser der Größen $n \times n$ mit $n \in \{3, 4\}$ sind eindeutig bestimmt, falls die leere Wohnung und die Position der Singles festliegen.*

Beweis. Der Beweis wird für alle Größen einzeln geführt:

Fall $n = 3$: Durch die leere Wohnung wird die Position der $2n - 2 = 4$ Singles festgelegt. In jeder Zeile und Spalte, in der zwei Singles m und $\widetilde{m}$ sind, fehlt dann noch ein Pärchen, dass durch $o/(m\widetilde{m})$ eindeutig bestimmt ist.

Fall $n = 4$: Durch die leere Wohnung wird die Position der $2n - 2 = 6$ Singles auf ein 3×3-Feld festgelegt. Innerhalb dieses Feldes sind noch genau drei Positionen frei, auf denen Pärchen fehlen. Die Mitbewohner in diesen WGs müssen sich aber von denen derselben Zeile und Spalte unterscheiden, dadurch werden für jede WG vier Mieter ausgeschlossen und die Pärchen liegen fest. Dann sind aber auch die Pärchen in der Etage und Spalte der leeren Wohnung klar.

□

Für größere Zahlhäuser ist das offensichtlich nicht mehr der Fall: Durch systematisches Ausprobieren findet man für $n = 5$ bei festgehaltener leerer Wohnung und Singles genau drei Möglichkeiten Pärchen anzuordnen, für $n = 6$ sind es etwa 15 000 Möglichkeiten und für $n = 7$ mehr als 45 000. Eine allgemeine Formel zur Bestimmung ist aber unklar.

Satz 4. *Die Anzahl der minimalen, klonfreien Zahlhäuser mit fester Ordnung der Größe* 3×3 *ist* 216, *die Anzahl der Größe* 4×4 *ist* 34 560, *die Anzahl der Größe* 5×5 *ist* 81 648 000.

Beweis. Folgt sofort aus den vorangegangenen Lemmata durch Einsetzen in die Formeln. □

Übung 3.
1. *Finden Sie eine nicht-rekursive Formel für* $A(k, l)$.
2. *Beweisen Sie Lemma 8.*
3. *Zeigen Sie: Es gibt kein minimales, klonfreies Haus mit neun Wohnungen, bei dem auch die Produkte der Diagonalen der Ordnung entsprechen.*

4 Diagonalprodukte

Wie schon im letzten Teil von Übung 3 gesehen, gibt es nicht unbedingt Zahlenhäuser, bei denen auch die Produkte der Diagonalwohnungen der Ordnung entsprechen. Hier sollen Bedingungen entwickelt werden, wann solche Häuser existieren und wie viele es davon gibt.

Definition 7. *Ein* ***Fachwerkhaus*** *ist ein Zahlhaus der Ordnung* o, *bei dem das Produkt der beiden Diagonalen auch der Ordnung entspricht.*

Untersucht werden wieder ausschließlich minimale, klonfreie Zahlenhäuser. Dabei sind grundsätzlich drei Fälle zu unterscheiden: Erstens gibt es eine leere Wohnung auf beiden Diagonalen, zweitens auf einer der beiden Diagonalen (o. B. d. A. links oben) und dritten auf eben keiner.

Lemma 13. *Betrachte ein minimales, klonfreies Fachwerkhaus mit* n^2 *Wohnungen.*

1. *Liegt die leere Wohnung auf einer Diagonalen, so ist der Rest der Diagonalen mit Pärchen gefüllt.*

2. *Auf einer Diagonalen ohne Pärchen gibt es genau zwei Singles und $n-2$ Pärchen.*

3. *Eine leere Wohnung kann nur dann auf beiden Diagonalen liegen, wenn n ungerade ist und die leere Wohnung genau in der Mitte liegt.*

Beweis. Klar, da es keine WGs mit mehr als zwei Mitbewohnern in minimalen, klonfreien Häusern und $M = 2n-2$ Mieter gibt. Es gibt nur eine leere Wohnung in einem solchen Haus, also muss diese, soll sie auf beide Diagonalen liegen, in der Mitte sein. Die existiert aber nur bei ungeradem n. □

Korollar 2. *Liegt die leere Wohnung in der Mitte oder links oben, so ist sie horizontal und diagonal von Pärchen umgeben.* □

5 Alternatives Wohnen in SdW, Mai 2005

Im konkreten Fall ging es um das Zahlenhaus der Ordnung $o = 2010$ mit 9 Wohnungen. Es handelt sich hierbei um ein klonfreies Haus mit $o = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, d. h. $M = 4$. Damit ist es ein minimales, klonfreies Zahlenhaus der Größe 3×3; es gibt also laut Satz 4 genau 216 Möglichkeiten.

6 Diskussion